5-1-2008

Jacques Salomon Hadamard and the Use of Symbols in Teaching Differential Calculus

Daniel S. Drucker

Wayne State University, drucker@math.wayne.edu

Claude Schochet

Wayne State University, clsmath@gmail.com

John Cuzzocrea

Wayne State University, jcuzzocrea@hotmail.com

Shlomo Sawilowsky

Wayne State University, shlomo@wayne.edu

Follow this and additional works at: <http://digitalcommons.wayne.edu/jmasm>

Part of the [Applied Statistics Commons](#), [Social and Behavioral Sciences Commons](#), and the [Statistical Theory Commons](#)

Recommended Citation

Drucker, Daniel S.; Schochet, Claude; Cuzzocrea, John; and Sawilowsky, Shlomo (2008) "Jacques Salomon Hadamard and the Use of Symbols in Teaching Differential Calculus," *Journal of Modern Applied Statistical Methods*: Vol. 7 : Iss. 1 , Article 31.

DOI: 10.22237/jmasm/1209616200

Available at: <http://digitalcommons.wayne.edu/jmasm/vol7/iss1/31>

This Translations, Ephemerals and Biographies is brought to you for free and open access by the Open Access Journals at DigitalCommons@WayneState. It has been accepted for inclusion in Journal of Modern Applied Statistical Methods by an authorized editor of DigitalCommons@WayneState.

Translations, Ephemerals, & Biographies

Jacques Salomon Hadamard and the Use of Symbols in Teaching Differential Calculus

Daniel S. Drucker, Claude Schochet
Department of Mathematics

John Cuzzocrea, Shlomo S. Sawilowsky
College of Education
Wayne State University

Scripta Universitatis, edited by Albert Einstein and first published in 1923, played a significant role in the establishment of Hebrew University in Jerusalem. Articles appeared on the left half of the journal in the author's chosen language and they were translated into Hebrew on the right half. The inaugural issue contained an article by the French mathematician Jacques Hadamard (8 December 1865 – 17 October 1963). Y. Wolfson of Kharkov translated it into Hebrew. An English translation is presented here, along with scans of the original first pages that were published in French and Hebrew. Documents pertaining to the origins of *Scripta* were translated from Hebrew into English in *JMASM* (2007, 6(1), p. 350-354).

Key words: mathematics education, differential calculus

Teaching the Concept of Differentials
by J. Hadamard, Paris

Poincaré, speaking at the Pedagogical Museum of Paris in 1904, stated that there was good reason to think in terms of derivatives rather than in terms of differentials. It seems to me that it would be beneficial for the teaching profession to conform resolutely to this principle and to abandon the rather complicated explanations which are classically given via the symbol d . As far as the first differential is concerned, it's OK; I can understand the equation

$$dy = f'(x) dx \quad (1)$$

or

$$dz = p dx + q dy \quad (1')$$

as corresponding to the respective approximate equality

$$\Delta y = f'(x) \Delta x \quad (2)$$

or

$$\Delta z = p \Delta x + q \Delta y \quad (2')$$

in which Δx , Δy , and Δz are infinitesimally small increments. But the second differential! Like everybody, I have read the account of the differential of the independent variable which must be constant (and which is, moreover, necessarily variable because it is infinitely small). If I decided not to cover these concepts in the classes that I have taught in elementary differential calculus, I confess it was because I only half understood them myself.

I know that they must nevertheless be understandable, and if I had needed them, for example, in geometric applications of differential calculus in my research, then I would have mastered them. However, clearly,

Daniel S. Drucker is a Professor of Mathematics. His research interests are in differential geometry, Lie groups, number theory, and applied linear algebra. Email him at drucker@math.wayne.edu. Claude Schochet is a Professor of Mathematics. His research interests are in algebraic topology and C*-algebras. Email him at schochet@math.wayne.edu. John Cuzzocrea is a Lecturer in Research and Statistical Methods. Email: jcuzzocrea@hotmail.com. Shlomo Sawilowsky is an Assistant Dean in the College of Education. His research interests are in rank-based nonparametric statistics. Email him at shlomo@wayne.edu.

such was not the case. I studied infinitesimal geometry like everyone else, having no special difficulty with second derivatives and never giving a thought to leaving the differential of the independent variable constant.

What, then, is the significance of equation (1)? Quite simply, it is that if x and therefore $y = f(x)$ are functions of an arbitrary dependent variable u , then, regardless of the relationship between x and u (provided that dx/du exists), one has

$$\frac{dy}{du} = f'(x) \frac{dx}{du}, \quad (3)$$

which is simply the chain rule.

What does equation (1') mean? Simply stated, if x , y , and hence $z = f(x, y)$, are expressed as functions of an arbitrary dependent variable u , then one has

$$\begin{aligned} \frac{dz}{du} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{du} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{du} \\ &= p \frac{dx}{du} + q \frac{dy}{du}. \end{aligned} \quad (3')$$

Such is the unique meaning of the equations (1) and (1'). Because the equations (3) and (3') hold for any independent variable u in terms of which the other variables are expressed, the variable u can be suppressed. The special advantage of differential notation is that it does not have to specify which variable is to be considered as independent.

What is the meaning of the equation

$$d^2y = f'(x) d^2x + f''(x) dx^2 \quad (4)$$

or

$$\begin{aligned} d^2z &= p d^2x + q d^2y + r dx^2 \\ &+ 2s dx dy + t dy^2? \end{aligned} \quad (4')$$

Simply that

$$\frac{d^2y}{du^2} = f'(x) \frac{d^2x}{du^2} + f''(x) \left(\frac{dx}{du} \right)^2 \quad (5)$$

or

$$\begin{aligned} \frac{d^2z}{du^2} &= p \frac{d^2x}{du^2} + q \frac{d^2y}{du^2} + r \left(\frac{dx}{du} \right)^2 \\ &+ 2s \frac{dx}{du} \frac{dy}{du} + t \left(\frac{dy}{du} \right)^2 \end{aligned} \quad (5')$$

where the variables have been expressed as functions of the parameter u and we still have $y = f(x)$ or $z = f(x, y)$.

Finally, what does the equation

$$d^2z = r dx^2 + 2s dx dy + t dy^2 \quad (6)$$

mean? In my opinion, nothing at all. The first two terms on the right-hand side of (5') disappear when x and y are *linear* functions of u , as happens in the proof of Taylor's theorem, the only place to my knowledge where formula (6) would arise. Aside from this, I don't see what one can get out of (6), except perhaps for one or two false ideas.

References

Hadamard, J. (1923). La notion de différentielle dans l'enseignement. *Scripta Universitatis Atque Bibliothecae Hierosolymitanarum: Mathematica et Physica / Volumen I*, 4. Musag HaDiferentzial B'Horah. Kisvei HaUniversitah V'Bais-HaSo'frim B'Yerushalyim: Matimatikah U'F'sika, Crach Aleph, 4.

Appendices

Following are scans of Hadamard's article in the original French and the Hebrew translation, an autographed letter signed (ALS) written by Hadamard to Monsieur E. F. Katz, and scans of title pages of selected texts by Hadamard.

La notion de différentielle dans l'enseignement.

Par

J. Hadamard, Paris.

POINCARÉ, dans sa conférence prononcée au Musée pédagogique de Paris en 1904, déclarait déjà qu'il y avait lieu de penser en dérivées et non en différentielles. Il me semble utile pour l'enseignement de se conformer résolument à ce principe et d'abandonner les explications assez compliquées qui sont classiquement données sur le symbole d . Pour la différentielle première, passe encore: Je puis comprendre l'égalité

$$(1) \quad dy = f'(x) dx$$

ou

$$(1') \quad dz = p dx + q dy$$

en relation avec l'égalité approchée

$$(2) \quad \Delta y = f'(x) \Delta x$$

ou

$$(2') \quad \Delta z = p \Delta x + q \Delta y$$

dans laquelle Δx , Δy , Δz sont des accroissements infiniment petits. Mais la différentielle seconde! J'ai lu, comme tout le monde, l'histoire de la différentielle de la variable indépendante qui doit être constante (et qui est d'ailleurs forcément variable puisque infiniment petite). Si je me suis décidé à ne pas exposer ces considérations dans les cours que j'ai eu l'occasion de professer sur les débuts du Calcul différentiel, c'est que j'avoue ne les avoir qu'à moitié comprises moi-même.

From the *JMASM* Archives.

מושג הדיפרנציאל בהוראה.

י. הדמר, פריס.

תרגם י. ולפסון, חרקוב.

פראנקרי בשעתו חוה דעתו, בדרשה שדרש במחזאון הפדגוגי של פריס בשנת 1904, כי המחשבה המדעית צריכה להשתמש בתורידיות ולא בדיפרנציאלים. ולדעתי יפה הוא זה להוראה, אם נסתגל בהחלט לפרינציפיון הזה ונסתלק מהבאורים הקלסיים המרכבים למדי שנותנים לסימבול d . אשר לדיפרנציאל הראשון, עדיין, בכי טוב הוא. וכולני להבין את השויון

$$dy = f'(x) dx \quad (1)$$

או

$$dz = p dx + q dy \quad (1')$$

בקשור עם השויון המקורב

$$\Delta y = f'(x) \Delta x, \quad (2)$$

או

$$\Delta z = p \Delta x + q \Delta y \quad (2')$$

שבו Δz , Δy , Δx הם הוספות קטנות בלי-סוף. אבל הדיפרנציאל השני! אף אני קראתי, נבל העולם כולו, את המעשיה על הדיפרנציאל של המשתנה החפשי שחייב הוא להיות קבוע ועומד דרך אנב משתנה ביותר, מפני שהוא קטן עד לאין-סוף). ואשר גמרתי

M 4°

From the JMASM Archives.

From the *JMASM* Archives.

Paris, 5 Novembre 1932
Bne Jean Polak (4^e arr^t)

Monsieur,
C'est avec grand plaisir que j'ai écrit pour dire —
à vous, j'en suis sûr,

Ne wieder Krieg!

Puisse ce cri être poussé et entendu par le plus d'hommes
possible, dans votre pays et dans le mien!

Croyez à mes sentiments très dévoués

J. Hadamard

Membre de l'Académie des Sciences de Paris
Professeur au Collège de France

JACQUES SALOMON HADAMARD

COLUMBIA UNIVERSITY IN THE CITY OF NEW YORK
PUBLICATION NUMBER FIVE
OF THE ERNEST KEMPTON ADAMS FUND FOR PHYSICAL RESEARCH
ESTABLISHED DECEMBER 17TH, 1904

FOUR LECTURES ON MATHEMATICS

DELIVERED AT COLUMBIA UNIVERSITY
IN 1911

BY

J. HADAMARD

MEMBER OF THE INSTITUTE, PROFESSOR IN THE COLLÈGE DE FRANCE AND IN THE ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
LECTURER IN MATHEMATICS AND MATHEMATICAL PHYSICS IN COLUMBIA UNIVERSITY FOR 1911

NEW YORK
COLUMBIA UNIVERSITY PRESS
1915

From the JMASM Archives.

ZEROS DES FONCTIONS HOLOMORPHES.

THEOREME.- Tout zéro d'une fonction holomorphe (dans une aire où elle n'est pas identiquement nulle) :

1°/ a un ordre de multiplicité fini et déterminé.

2°/ est isolé, c'est-à-dire à une distance finie de tout autre zéro.

1°/ Soit $f(z) = A_0 + A_1(z-a) + \dots + A_n(z-a)^n + \dots$

le développement de la fonction autour du point ordinaire a . Si ce point est un zéro, A_0 est nul. Il peut en être de même de quelques-uns des coefficients suivants, mais non de tous (puisque f n'est pas identiquement nul). Si A_n est le premier coefficient non nul, on a

$$\begin{aligned} f(z) &= (z-a)^n \varphi(z) \\ \varphi(a) &= A_n \neq 0. \end{aligned}$$

L'ordre de multiplicité est alors n .

2°/ La série qui représente $\varphi(z)$ est une série de puissances qui admet même cercle de convergence que $f(z)$, c'est donc une fonction holomorphe dans le même cercle, qui est différente de zéro pour $z = a$. Cette fonction étant continue, on trouvera un nombre ρ positif tel que la fonction ne s'annule pas dans le cercle de rayon ρ et de centre a ; $\varphi(z)$ n'admet pas de zéro à l'intérieur de ce cercle, et $\varphi(z)$ n'admet pas à l'intérieur de ce cercle d'autre zéro que $z = a$.

Exercice.- Trouver une limite inférieure de ρ , connaissant $\varphi(z) = A_n + A_{n+1}(z-a) + A_{n+p}(z-a)^p + \dots$ ($A_n \neq 0$)

(question analogue à la recherche d'une limite inférieure des racines positives d'une équation).

On écrira $\varphi(z) = A_n - \varphi_1(z)$

avec pour $\varphi_1(z)$ une majorante de la forme

$$\varphi_1(z) << M \left(\frac{1}{1 - \frac{z}{R}} - 1 \right) = \frac{Mz}{R-z}$$

193.- On déduit de là le

Théorème.- Une fonction holomorphe dans une aire limitée en tous sens et sur le contour de cette aire (1) ne peut y admettre qu'un nombre fini de zéros.

Car les zéros, supposés en nombre infini, admettraient (1^{re} année n° 56) soit dans l'aire, soit sur son contour, un point d'accumulation, ce que nous venons de démontrer être impossible.

Remarque.- Mais une fonction holomorphe dans tout le plan (fonction entière) y admet, du moins en général (exemple $\sin z$, exemple contraire e^z), une infinité de zéros.

(1)- Cette partie de l'hypothèse est indispensable. Exemple : $\sin \frac{1}{z}$, dans une demi circonférence ayant son centre à l'origine et limitée à l'axe imaginaire (fig. ci-contre), a une infinité de zéros $z = \frac{1}{k\pi}$. Le point singulier est l'origine, qui est un point essentiel (voir plus loin n° 196).

AN ESSAY ON
The Psychology of Invention
in the
Mathematical Field

BY
JACQUES HADAMARD

PRINCETON
PRINCETON UNIVERSITY PRESS
1945

From the *JMASM* Archives.